

## Valorisation d'options avec méthodes non paramétriques et paramétriques

### Responsable du projet :

**René Garcia**

Département de sciences économiques et CIRANO

Université de Montréal

Tél.: (514) 343-5960

Fax : (514) 343-5831

Courriel : garciar@cirano.umontreal.ca

### Chercheurs principaux:

**Yoshua Bengio**

Département d'informatique et recherche  
opérationnelle, CRM, Université de Montréal

**Jérôme Detemple**

Finance Department, Boston University, School of  
Management et CIRANO

**Eric Ghysels**

Economics Department, PennState University et  
CIRANO

**Eric Renault**

CREST, INSEE, Université de Montréal

### Description du projet

#### **Motivation**

En ce qui concerne les travaux des deux prochaines années, nous voulons poursuivre l'étude de l'imposition de restrictions théoriques peu restrictives dans l'estimation non paramétrique de prix d'options. Nous voulons en particulier imposer des propriétés de monotonie et de convexité à la fonction de prix d'options par rapport au prix de l'action. Cette propriété apparaît naturelle si on considère que ce que rapporte l'option à l'échéance est une fonction convexe du prix du sous-jacent. On peut donc espérer qu'elle conserve cette propriété au cours de sa durée de vie. Par ailleurs, Broadie et al. [1] ont montré que la convexité semblait être vérifiée dans les données. Des considérations théoriques conduisent aussi à la convexité de la fonction de prix d'option sous certaines hypothèses relativement peu contraignantes.

Lorsqu'on estime une fonction de prix d'option avec des méthodes non paramétriques, ces contraintes de forme ne sont pas automatiquement respectées. En général, imposer des restrictions théoriques à un estimateur d'une fonction peut permettre de

permet de contrôler l'erreur de couverture.

Dans un deuxième volet de la recherche, nous voulons analyser la dynamique des prix d'options. Pour les options européennes sur indice tels que le S&P 500, nous disposons quotidiennement de prix sur une série de contrats qui se différencient par le prix de levée de l'option (prix du sous-jacent auquel l'option peut être exercée) et par l'échéance de l'option (options à 1, 3, 6 ou 12 mois). Nous disposons donc comme pour la structure à terme des taux d'intérêt de données en série chronologique et en coupe transversale. Plutôt que d'analyser directement ces prix d'options, les études empiriques se penchent plutôt sur la volatilité implicite, à savoir la volatilité obtenue en égalisant la formule de Black et Scholes (1973) au prix d'option observé. Nous avons donc une série chronologique de structures quotidiennes de volatilités implicites. Si le modèle de Black et Scholes était le vrai modèle d'évaluation d'options, cette structure serait une droite puisque toutes les options dépendent du même actif sous-jacent. Empiriquement, on trouve de multiples formes pour cette structure mais une analyse statistique systématique de ces formes et de leur dynamique n'a pas encore été effectuée. Par ailleurs, nous voulons réaliser une étude de la performance empirique de certains modèles espace-état.

## **Objectifs**

Les objectifs de la recherche proposée sont donc doubles. D'une part, il s'agit de mettre au point des méthodes permettant d'obtenir des formules non paramétriques de valorisation d'option qui réduisent les erreurs de couverture. D'autre part, il s'agit de bien analyser et d'exploiter la structure de panel des données pour tenter d'arriver à des estimations plus efficaces de ces fonctions soit par des méthodes non paramétriques soit par des méthodes paramétriques.

## **Méthodologie**

Pour le premier volet de la recherche, nous imposons la monotonie et la convexité de la fonction de prix d'option par une méthode appelée isotonisation. Les régressions isotoniques ont été développées pour assurer la monotonie ou la concavité d'un estimateur de régression fonctionnel. La méthode consiste à projeter un estimateur de régression sur la classe des fonctions monotones. Pour assurer la monotonie et la convexité, nous appliquons la procédure d'isotonisation deux fois, d'abord à la fonction puis à sa dérivée. Nous analysons deux types d'estimateurs non paramétriques, les estimateurs à noyau et un estimateur seminon-paramétrique, fondé sur les réseaux de neurones et utilisé par Garcia and Gencay [4, 5] pour la valorisation des options. Pour les deux estimateurs, on spécifie le prix d'option comme une fonction d'une variable mesurant la position monétaire (moneyness) de l'option qui intègre le prix de l'actif

résultats préliminaires montrent que l'imposition de la restriction de convexité par l'isotonisation permet de retrouver la dérivée de la fonction originale et donc de réduire l'erreur de couverture. Des résultats similaires sont obtenus avec les méthodes de noyau.

Nous voulons aussi introduire des formes fonctionnelles qui contraignent la dérivée de la fonction à être positive dans le cadre de modèles fondés sur les réseaux de neurones. L'avantage potentiel de l'approche proposée est que cela permettrait de garantir en tout point que les contraintes sont respectées (alors que l'approche basée sur l'isotonisation effectue une correction qui est garantie seulement sur les points de l'ensemble d'entraînement) et que cela forcerait le réseau de neurones à se limiter uniquement aux fonctions satisfaisant ces contraintes (de positivité de la fonction et de ses deux premières dérivées), ce qui devrait réduire encore la variance de la fonction de prédiction obtenue. Nous avons déjà réussi à mettre au point une classe de fonctions sur les réels qui ait ces propriétés, tout en étant assez large pour constituer ce qu'on appelle un approximateur universel (donc pouvant estimer n'importe quelle fonction lisse ayant ces propriétés avec une précision arbitraire). Il faut maintenant étendre ce résultat à des fonctions sur des vecteurs réels et ensuite évaluer les avantages pratiques que pourraient apporter ces classes de fonctions aux modèles fondés sur les réseaux de neurones.

Pour le deuxième volet, nous nous proposons d'établir une série de faits empiriques dynamiques sur la structure des volatilités implicites. L'analyse peut être conduite dans diverses dimensions: options d'achat et de vente, options à la monnaie, dans la monnaie et hors la monnaie, options de courte et de longue échéances. On essaiera notamment d'étudier l'auto corrélation et la dynamique de l'asymétrie de ces séries. Une question cruciale est d'établir si des modèles simples de séries chronologiques telles que des vecteurs autorégressifs sont capables de bien prévoir la structure de ces volatilités à divers horizons. Une fois ces faits empiriques établis, il sera possible de les confronter aux caractéristiques impliquées par les divers modèles théoriques d'évaluation des options. Nous souhaitons ensuite réaliser une étude détaillée de la performance empirique des modèles en temps discret, à savoir les modèles d'équilibre espace-état. Ces modèles permettent notamment de reproduire diverses formes de la structure de volatilité implicite et l'aplatissement de la structure de volatilité avec l'échéance (voir Garcia, Luger et Renault (1999)). Il importe à présent de relier précisément les paramètres structurels du modèle aux faits empiriques dynamiques reproduits par le modèle. On s'intéressera, d'une part, à l'inférence des paramètres de préférence à partir des prix d'options. On essaiera entre autres de répondre aux questions suivantes : les prix d'options sont-ils plus informatifs que les prix du sous-jacent sur certains paramètres de préférence? Les paramètres inférés des prix d'options

suivante.

### **Réseautage**

Ce projet représente une collaboration CIRANO-CRM et a aussi des liens avec d'autres projets de recherche du  $rcm_2$  ainsi qu'avec d'autres réseaux comme le réseau MITACS. En ce qui concerne le  $rcm_2$ , ce projet est lié, au niveau des techniques utilisées, au projet du CRM utilisant les analyses temps-fréquence (dirigé par Bernard Goulard). D'ailleurs, plusieurs chercheurs ont participé à des ateliers organisés par les groupes respectifs. Ce projet est ainsi aussi lié aux projets MITACS dans le domaine des technologies de l'information et en particulier celui sur la simulation, l'estimation et l'inférence dans les modèles financiers pour la gestion du risque et la valorisation des produits dérivés.

### **Échéancier**

Avril 2000 - Avril 2001

- Estimation des modèles nonparamétriques de valorisation d'options avec position monétaire en entrée avec isotonisation. Expériences avec données simulées par Black-Scholes et avec données sur les prix d'options de l'indice S&P 500 (données journalières de 1987 à 1997). Estimation des modèles nonparamétriques de valorisation d'options avec position monétaire en entrée avec formes fonctionnelles qui contraignent la dérivée de la fonction à être positive dans le cadre de modèles fondés sur les réseaux de neurones. Mêmes expériences qu'avec l'isotonisation, comparaison des résultats.
- Établissement de modèles de séries chronologiques à plusieurs variables (différentes catégories d'options selon leur position monétaire et leur échéance, options d'achat et de vente) à partir des données sur les prix d'options de l'indice S&P 500 (données journalières de 1987 à 1997). Étude de la persistance des diverses séries. Capacité prévisionnelle des modèles.
- Estimation par méthode des moments des modèles d'équilibre espace-état à partir des données sur les prix d'options de l'indice S&P 500 (données journalières de 1987 à 1997).
- Transmission des résultats aux partenaires sous forme de présentations et de transfert de logiciel.

### **Rapport d'étape**

Un contrat d'option est un instrument financier qui a deux utilités principales: il permet à certains investisseurs de s'assurer (puisque le contrat fixe le prix futur du titre sous-jacent) et à d'autres investisseurs de spéculer sur les fluctuations du titre sous-jacent en transigeant sur un contrat qui se vend à une fraction du prix de ce dernier. La grande majorité des options sont des contrats sur des actions d'entreprise ou encore sur des indices boursiers, mais il existe aussi des contrats d'options sur obligations dont la Bourse de Montréal est devenue spécialiste. Rares sont aujourd'hui les gestionnaires de portefeuille institutionnels qui n'utilisent pas les titres dérivés dans leurs stratégies financières.

La formule mathématique de Black et Scholes a été le catalyseur de l'explosion de ces marchés puisqu'elle fournissait aux investisseurs un prix de référence qui facilitait les échanges à grande échelle. Le CBOE battait récemment son record avec plus de 26 millions de contrats d'options sur actions en circulation. Malgré le rôle fondamental que la formule a joué dans le développement de marchés d'échange organisés, il est vite apparu qu'elle conduisait à des erreurs d'évaluation considérables lorsque le prix de marché du titre sous-jacent s'éloignait du prix fixé dans le contrat. Les praticiens ont réagi en utilisant la formule avec des ajustements issus de leur expérience des marchés et les scientifiques en tentant de généraliser la formule. Il faut réaliser que l'obtention de formules analytiques comme la formule de Black et Scholes repose sur des hypothèses fortes sur le processus d'évolution de l'actif sous-jacent. Ainsi, des scientifiques ont proposé des extensions où la volatilité du titre sous-jacent et le taux d'intérêt n'étaient plus constants comme dans la formule originale et ont supposé des lois plus générales pour l'évolution du prix du titre sous-jacent.

Si on n'est pas prêt à faire de telles hypothèses de loi, on peut suivre une approche dite non paramétrique qui consiste à estimer par des formes fonctionnelles souples la relation entre la variable à expliquer (ici le prix de l'option) et les déterminants de cette variable (le prix du titre sous-jacent, le prix d'exercice et l'échéance de l'option). Si cette relation est non linéaire, ces méthodes non paramétriques seront en mesure de détecter ces non-linéarités. L'estimation de ces relations s'effectue par un apprentissage automatique à partir des données. Les réseaux de neurones sont des algorithmes particulièrement adaptés à l'apprentissage de relations non linéaires entre des variables. Des études ont montré que les algorithmes d'apprentissage en général et les réseaux de neurones en particulier pouvaient facilement apprendre la formule de Black et Scholes et qu'ils pouvaient en outre produire des performances supérieures à cette dernière avec des données réelles, ce qui attiré l'attention des praticiens.

### **Progrès réalisés**

américaines et européennes. Les résultats montrent qu'il existe des différences importantes entre les prédictions des modèles paramétriques et non paramétriques.

- Dans le cas des options américaines, les modèles théoriques conduisent à des expressions complexes qui sont difficiles à estimer. Une approche non-paramétrique nous permet d'estimer les prix d'options d'achat et les frontières d'exercice conditionnelles aux dividendes et à la volatilité. Nous établissons que les dividendes seuls ne rendent pas compte de tous les aspects de l'évaluation de ces options et des décisions d'exercice, ce qui suggère la nécessité d'inclure la volatilité stochastique.
- Même si les modèles paramétriques comme le modèle de Black-Scholes ne correspondent pas aux données, certaines restrictions a priori fournies par la théorie peuvent améliorer la performance des modèles non paramétriques. Nous montrons qu'une forme généralisée de Black-Scholes fondée sur l'homogénéité de degré un de la fonction de prix d'option par rapport au prix de l'actif sous-jacent et au prix d'exercice nous permet de prévoir plus précisément les prix d'options.

#### **Étudiants et stagiaires encadrés 11/98-11/99**

**Richard Luger**

étudiant de doctorat, département de sciences économiques, poste obtenu à la Banque du Canada.